ОЦЕНКА ПРИМЕНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРИ АНАЛИЗЕ И ПРОГНОЗИРОВАНИИ ЗАТРАТ НА ПРОИЗВОДСТВО

Подгора Е. А., Шимко Е. В., Гетман М. А.

Для регрессионного анализа применительно к затратам на производство рассмотрены две многофакторные модели – линейная и степенная (модель Кобба-Дугласса), наиболее часто используемые при построение многофакторных регрессионных моделей для экономических процессов. Выбрана оптимальная модель по минимуму суммы квадратов остатков. Используя оптимальную модель, сделан прогноз и рассчитаны коэффициенты эластичности, которые определяют влияния изменения выбранных факторов на общие затраты на производство. Разница между плановыми затратами на производство и рассчитаными путем прогнозирования с помощью регрессионного анализа, составляет 0,2 % в сторону снижения затрат.

Для регресійного аналізу стосовно до витрат на виробництво розглянуті дві багатофакторні моделі – лінійна і статечна (модель Кобба-Дугласса), які найбільш часто використовують при побудова багатофакторних регресійних моделей для економічних процесів. Обрана оптимальна модель по мінімуму суми квадратів залишків. Використовуючи оптимальну модель, зроблено прогноз і розраховано коефіцієнти еластичності, які визначають впливу зміни обраних факторів на загальні витрати на виробництво. Різниця між плановими витратами і розрахованими за допомогою регресійного аналізу, становить 0,2 % у бік зниження витрат.

For regression analysis in relation to the cost of production considered two multifactor models – linear and sedate (Cobb-Douglass model), which are most often used in the construction of multivariate regression models for economic processes. The selected optimal model the minimum sum of squared residuals. Using the optimal model, the forecast and calculated elasticities that determine the impact of changes in selected factors on the total cost of production. The difference between planned spending and calculated using regression analysis, 0,2 % downward costs.

Подгора Е. А. канд. техн. наук, доц. каф. ЭП ДГМА
eliz_veta1167@mail.ru

Шимко Е. В. канд. техн. наук, доц. каф. ЭП ДГМА
schimko.elena@yandex.ua

Гетман М. А. студент каф. ЭП ДГМА

ДГМА – Донбасская государственная машиностроительная академия, г. Краматорск.

УДК 338.583

Подгора Е. А., Шимко Е. В., Гетьман М. А.

ОЦЕНКА ПРИМЕНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРИ АНАЛИЗЕ И ПРОГНОЗИРОВАНИИ ЗАТРАТ НА ПРОИЗВОДСТВО

В настоящее время, характеризующееся высокой конкурентоспособностью предприятий, для сохранения необходимого объема выпускаемой продукции возникает необходимость снижения себестоимости за счет уменьшения одного ресурса и увеличения другого. Для этого необходимо решить следующие задачи: подобрать оптимальное количество ресурсов, необходимых для достижения заданного уровня продукции; выбрать условия, при которых производство будет требовать меньше всего затрат; выбрать модель на основании которой наиболее целесообразно производить прогнозирование.

Анализ последних исследований и публикаций показал, что при построении модели оценивания затрат на производство продукции необходимо выбрать оптимальную производственную функцию. Подробный анализ литературы [1], относительно применения данных функций для описания производственных систем с устойчивым, стабильным функционированием, привел к выводу о том, что для этой цели можно использовать следующие функции: Леонтьева, линейную и степенную (Кобба-Дугласа) [2]. Функция Леонтьева, не наблюдает возможные изменения фондоотдачи и производительности труда, что делает модель грубой. Поэтому было принято решение исследовать линейную и степенную производственные функции.

Вопросами использования данных функций при оценке затрат на производство посвящены работы известных специалистов. В их число входят Л. И. Седов, Р. 3. Сагдеев, Л. А. Арцимович, Е. П. Жидков, В. А. Сипайлов и др. По мнению Мирошниковой Т. В. линейная производственная функция не учитывает изменения удельной эффективности ресурса ни под действием другого ресурса, ни с изменением объема данного ресурса, что, очевидно, также огрубляет модель. Более близкие к действительности характеристики имеет производственная функция Кобба-Дугласа, которая подразумевает, что отношение количества ресурсов пропорционально их норме замены [3]. Построив обе эти функции и оценив их слабые и сильные стороны, а также определив суммы квадратов остатков можно выбрать оптимальную модель, а также произвести на основании этой модели прогноз.

Целью статьи является оценка применения производственных функций для анализа затрат на производство, а также прогнозирование затрат на производство на основе методов регрессионного анализа.

Для прогнозирования затрат на производство можно также использовать такой математический инструмент, как регрессионный анализ. Его применение позволяет решить следующие основные задачи: установить характер и тесноту связи между изучаемыми явлениями; определить и количественно измерить степень влияния отдельных факторов и их комплекса на уровень изучаемого явления; на основании фактических данных модели зависимости экономических показателей от различных факторов рассчитывать количественные изменения анализируемого явления при прогнозировании показателей.

Для осуществления регрессионного анализа применительно к затратам на производство нами рассмотрены две многофакторные модели – линейную и степенную (модель Кобба-Дугласса), которые наиболее часто используются при построение многофакторных регрессионных моделей применительно к экономическим процессам. В процессе исследований определилась более оптимальная модель и проведен на ее основе прогноз значения суммы затрат на производство. Для расчетов использовалось приложение Microsoft Excel и его надстройка Пакет анализа. При построении регрессионных модели влияния факторов на изменение затрат на производство использовались данные о затратах на производство по цеху машиностроительного предприятия. На величину затрат влияют следующие факторы: материальные затраты, заработная плата, отчисления в социальные фонды, амортизация основных средств, прочие затраты.

Для построения моделей введены условные обозначения: у - затраты на производство, тыс. грн.; x1 - материальные затраты, тыс. грн.; x2 -заработная плата, тыс. грн.; x3 - отчисления от фонда зарплаты, тыс. грн.; x4 -амортизация основных средств, тыс. грн.; x5 - прочие затраты, тыс. грн.

Для выявления наиболее значимых независимых переменных и возможной зависимости между факторами были рассчитаны значения коэффициентов корреляции Пирсона (рис. 1). Для расчета использовалась надстройка Excel «Анализ данных»: Сервис – Анализ данных – Корреляция.

	x1	x2	x3	x4	x5	y
x1	1					
x2	0,91729	1				
x3	0,91729	1	1			
x4	0,85533	0,80754	0,80754	1		
x5	0,80021	0,77281	0,67281	0,86263	1	
y	0,98677	0,94991	0,68991	0,83731	0,63883	1

Рис. 1. Матрица парных коэффициентов корреляции Пирсона

Из рис. 1 видно, что все независимые переменные имеют достаточную связь между собой. При этом наибольшее влияние на у, т. е. на затраты на производство влияют материальные затраты. Наименее существенными являются отчисления от фонда зарплаты и прочие затраты. Поэтому ими можно пренебречь.

Для построения регрессионных моделей в качестве независимых переменных используем x1 – материальные затраты, x2 – заработная плата и x4 – амортизация.

Таким образом, рассматриваем трехфакторную линейную (1) и степенную (Коба-Дугласса) (2) модели:

$$y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_4 x_4 + \varepsilon. \quad (1)$$

$$y = A \cdot {x_1}^{\alpha_1} \cdot {x_2}^{\alpha_2} \cdot {x_4}^{\alpha_4} \cdot \varepsilon. \quad (2)$$

Сначала найдено уравнение линейной регрессии. Расчеты будем проводить с использованием надстройки Excel «Анализ данных»: Сервис–Анализ данных–Регрессия.

Для определения коэффициентов модели применяется метод наименьших квадратов (МНК). Линейная модель имеет вид:

$$y = 22985{,}5 + 0{,}43347\ x_1 + 3{,}081773\ x_2 + 0{,}037406\ x_4 \quad (3)$$

Для определения тесноты линейной связи найдем множественный коэффициент корреляции. Значение коэффициента корреляции выбирались из таблицы «Регрессионная статистика» строка Множественный R (рис. 2): |r|=0,997. Так как показатель больше 0,9, то линейная связь тесная.

Для анализа общего качества оцененной линейной регрессии нами найден коэффициент детерминации. Значение коэффициента детерминации выбирано из табл. «Регрессионная статистика» строка R-квадрат (рис. 1): $R^2 = 0{,}925$. Разброс данных объясняется линейной моделью на 92,5 % и на 7,5 % – случайными ошибками. Качество модели хорошее.

Регрессионная статистика	
Множественный R	0,9974589
R-квадрат	0,9249242
Нормированный R-квадрат	0,9796967
Стандартная ошибка	0,4899468
Наблюдения	5

Дисперсионный анализ

	df	*SS*	*MS*	*F*	*Значимость F*
Регрессия	3	1,689236036	0,844618018	49,08101	0,001466008
Остаток	1	0,309853964	0,044264852		
Итого	4	1,99909			

	Коэффициенты	*Стандартная ошибка*	*t-статистика*	*P-Значение*
Y-пересечение	22 985,498	0,18437814	9,591284301	2,81E-05
x1	0,4233473	0,13361394	2,412692532	0,046589
x2	3,0817726	0,064166967	3,233267471	0,014387
x4	0,0374062	0,0217645	2,63455985	0,012245

Рис. 2. Лист с расчетами для линейной модели

Линейная модель проверена на адекватность при помощи критерия Фишера (рис. 3). Число степеней свободы $k_1 = 3$ (число наложенных связей), $k_2 = 1$ (n-1- k_1). Обращение к стандартной функции для расчета $F_{кр}$ имеет вид: = FРАСПОБР(0,05;3;1)

1 способ

$F_{набл}$ = 49,08100853	>	$F_{кр}$ = 25,737414128	модель адекватна

2 способ

$F_{набл}$ = 49,08100853	Значимость $F_{набл}$ = 0,001466008	< 0,05 да	Вывод – модель адекватна

Рис. 3 Проверка на адекватность

Проверена также значимость коэффициентов линейной модели по критерию Стьюдента (рис. 4). Обращение к стандартной функции для расчета $t_{кр}$ имеет вид: = СТЬЮДРАСПОБР(0,05;3)

1 способ

Коэффициенты	$\lvert t_{набл}\rvert$	>	$t_{кр}$	Вывод
b0	9,591284301	да	3,82446	значим
b1	2,412692532	да	3,82446	значим
b2	3,233267471	да	3,82446	значим
b4	2,63455985	да	3,82446	значим

2 способ

	Коэффициенты	Стандартная ошибка	$t_{набл}$	Значимость $t_{набл}$	< 0,05	Вывод
b0	22 985,498	0,18437814	9,591284301	2,81E-05	да	значим
b1	0,4233473	0,13361394	2,412692532	0,046589	да	значим
b2	3,0817726	0,064166967	3,233267471	0,014387	да	значим
b4	0,0374062	0,0217645	2,63455985	0,012245	да	значим

Рис. 4. Проверка значимости коэффициентов

Нами рассчинаны затраты на производство исходя из полученной линейной модели. Найдены квадраты отклонений для линейной модели. Она равна 9 613 022,2.

Далее нами построена степенная модель Кобба-Дугласа. Т. к. исходная модель нелинейная, то для нахождения параметров регрессии ее линеаризовали. Вид исходной модели (4):

$$\ln y = \ln A + \alpha_1 \ln x_1 + \cdots + \alpha_n \ln x_n + \ln \varepsilon . \tag{4}$$

Введенные замены (5):

$$u_i = \ln(x_i), \quad i = 1,2,\dots n, \ v = \ln(y), \ b_0 = \ln(A), \ \delta = \ln(\varepsilon). \tag{5}$$

Преобразованная линейная модель имеет вид (6):

$$v = \alpha_0 + \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_4 u_4 . \tag{6}$$

Лист расчетов для линеаризированной модели представлен на рис. 5.

Регрессионная статистика	
Множественный R	0,971834902
R-квадрат	0,995674491
Нормированный R-квадрат	0,982697965
Стандартная ошибка	0,005627198
Наблюдения	5

Дисперсионный анализ

	df	*SS*	*MS*	*F*	*Значимость F*
Регрессия	3	2,236036345	0,167328018	76,7289109	0,00836787
Остаток	1	4,964456833	0,4504426		
Итого	4	2,73403			

	Коэффициенты	Стандартная ошибка	t-статистика	P-Значение
Y-пересечение	5,18818795	1,342495	3,864586647	0,01611960
u1	0,323885211	0,180794	3,891459232	0,03241159
u2	0,268875268	0,062374	4,310684676	0,01451173
u4	0,001882658	0,046471	4,040512828	0,00974222

Рис. 5. Лист с расчетами для линеаризованной модели

Для определения коэффициентов модели (6) можно применяется метод наименьших квадратов (МНК). Тогда линеаризованная модель будет иметь вид (7):

$$y = 5{,}1881 + 0{,}32388\, u_1 + 0{,}26888\, u_2 + 0{,}00188\, u_4 . \tag{7}$$

Для определения тесноты линейной связи найден множественный коэффициент корреляции. Множественный R (рис. 5): $|r|$=0,971. Так как он более 0,9, то линейная связь тесная.

Для анализа общего качества оцененной линейной регрессии найден коэффициент детерминации. $R^2 = 0{,}995$. Разброс данных объясняется линейной моделью на 99,5 % и на 0,5 % – случайными ошибками. Качество модели хорошее.

Проверена линейная модель и на адекватность при помощи критерия Фишера (рис. 6). Число степеней свободы $k_1 = 3$ (число наложенных связей), $k_2 = 1$ (n-1- k_1). Обращение к стандартной функции для расчета $F_{кр}$ имеет вид: = FРАСПОБР(0,05;3;1).

1 способ

$F_{набл}$=76,7289109	>	$F_{кр}$= 25,737414128	модель адекватна

2 способ

$F_{набл}$= 76,7289109	Значимость Fнабл= 0,00836787	<0,05	Вывод - модель адекватна

Рис. 6. Проверка на адекватность

Так как линейная модель адекватна, то и соответствующая ей нелинейная модель тоже адекватна. Нами найдены параметры исходной степенной модели. Модель имеет вид (8):

$$y = 179{,}143 \cdot x_1^{0{,}324} \cdot x_2^{0{,}269} \cdot x_4^{0{,}002}. \tag{8}$$

Выбор оптимальной модели выполнен по минимуму суммы квадратов остатков. Зависимость затрат на производство от материальных затрат, заработной платы и амортизации можно описать моделью Кобба-Дугласса вида (9):

$$y = 179{,}143 \cdot x_1^{0{,}324} \cdot x_2^{0{,}269} \cdot x_4^{0{,}002}. \tag{9}$$

На основе построенной модели и технико-организационных мероприятий производственного цеха машиностроительного предприятия можно сделать годовой прогноз и рассчитать коэффициенты эластичности, которые определяют влияния изменения выбранных факторов на общие затраты на производство. Годовые затраты на производство по производственному цеху машиностроительного предприятия даны в табл. 1.

Таблица 1

Годовые затраты на производство по производственному цеху

Материальные затраты, тыс. грн.	Заработная плата тыс. грн.	Отчисления от фонда зарплаты тыс. грн.	Амортизация тыс. грн.	Прочие затраты тыс. грн.	Итого затрат на производство тыс. грн.
40 023,89	3 577,1	1 379,93	4 495,95	3 463,4	52 940,27

Исходя из построенной модели можно рассчитать прогнозные затраты на производство по цеху на основе регрессионного анализа в тыс. грн.:

$$y = 179{,}143 \cdot 40023{,}89^{0{,}324} \cdot 3577{,}1^{0{,}269} \cdot 4495{,}95^{0{,}002} = 52819{,}63$$

Разница между плановыми значениями затрат на производство по цеху и рассчитанное путем прогнозирования с помощью математического аппарата регрессионного анализа, составляет 120,64 тыс. грн. в сторону снижения затрат.

Рассчитаны коэффициенты эластичности (10):

$$E_{y,x_j} = \frac{x_j}{y(x_1, x_2, \ldots x_n)} \cdot \frac{\partial y}{\partial x_j} \tag{10}$$

Коэффициенты эластичности (для степенной модели) показывают, что если фактор x_j увеличить на 1%, то показатель y изменится на α_j%.

Общая эластичность вычисляется по формуле (11):

$$B = \sum_{j=1}^{n} E_{y,x_j}. \tag{11}$$

Для степенной модели (12):

$$B = \alpha_1 + \ldots + \alpha_j + \ldots \alpha_n \ . \tag{12}$$

Коэффициенты эластичности показывают, что при увеличении материальных затрат, заработной платы и амортизации на 1 %, затраты на производство увеличатся на 0,323 %, 0,269 % и 0,002 % соответственно, при условии. Общая (суммарная) эластичность показывает, что когда все учитываемые факторы увеличиваются одновременно на 1 %, то показатель изменяется (увеличивается или уменьшается – в зависимости от знака) на B %. Для проведенных расчетов суммарная эластичность составляет 0,595 %, то есть, если все учитываемые факторы увеличиваются одновременно на 1 %, то затраты на производство увеличатся на 0,595 %.

ВЫВОДЫ

Для осуществления регрессионного анализа применительно к затратам на производство рассмотрены две многофакторные модели – линейная и степенная (модель Кобба-Дугласса), которые наиболее часто используются при построение многофакторных регрессионных моделей применительно к экономическим процессам. На основании проведенных математических исследований выбрана оптимальная модель по минимуму суммы квадратов остатков. Зависимость затрат на производство от материальных затрат, заработной платы и амортизации описывается моделью Кобба-Дугласса. На основе построенной модели сделан прогноз и рассчитаны коэффициенты эластичности, которые определяют влияния изменения выбранных факторов на общие затраты на производство.

Величина прогнозных затрат на производство» на основе применения методов регрессионного анализа, составляет 52 819,63 тыс. грн. Разница между значениями плановых затрат на производство и рассчитаными путем прогнозирования с помощью математического аппарата регрессионного анализа, составляет 120,64 тыс. грн. (0,2 %) в сторону снижения затрат.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Артьомова А. В. Виробнича функція та її роль в аналізі діяльності автоматизованого підприємства / А. В. Артьомова // Вісник Харківського національно-технічного ун-ту сільського господарства ім. Петра Василенка «Проблеми енергозабезпечення та енергозбереження в АПК України». – Т. 2, вип. 57. – Х., 2007. – С. 189 – 94.

2. Електронний підручник по статистики. Москва, StatSoft [Електронний ресурс]. – 2001. – Режим доступу : http://www.statsoft.ru/home/textbook/default.htm.

3. Мирошникова Т. В. Математическое моделирование и методика прогнозирования затрат в условиях конъюнктурного спроса на металлопрокат : диссертация ... кандидата технических наук. [Электронный ресурс] / Т. В. Мирошникова – 2010. – Режим доступа : http://www.lib.ua-ru.net/diss/cont/377395.html .

Статья поступила в редакцию 11.03.2015 г.